Przećwiczmy równanie Eulera-Lagrange'a oraz kanoniczne równania Hamiltona na banalnie prostym przykładzie (dla czytelności)

Weźmy ciało o masie *m* znajdujące się w potencjale grawitacyjnym $V = mgz$ nad powierzchnią ziemi i puszczone swobodnie bez prędkości początkowej. Nie występuje siła oporu powietrza. Znajdźmy postać kinematycznego równania ruchu ciała raz za pomocą równania Eulera-Lagrange'a, a raz za pomocą kanonicznych równań Hamiltona.

Układ odniesienia przyjmujemy taki, aby kierunek od powierzchni ziemi w górę pokrywał się z dodatnią półosią *z*. W chwili początkowej, ciało znajduje się na wysokości *h* nad ziemią.

Wypiszmy wpierw Lagrangian (nazywany też *potencjałem kinetycznym*). Jest on generalnie funkcją współrzędnych uogólnionych, prędkości uogólnionych i czasu, $L = L(q, \dot{q}, t)$, traktowanych jako zmienne niezależne. W naszym przypadku są to: współrzędna naturalna *z* oraz prędkość w kierunku *z*:

$$L \equiv T - V = \frac{m\dot{z}^2}{2} - mgz$$

(*T* – energia kinetyczna). W obecnym zagadnieniu, równanie Eulera-Lagrange'a dotyczy tylko kierunku *z*, a zatem ma postać

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \quad . \qquad \text{(E-L)}$$

Licząc składniki (E-L) dla naszego Lagrangianu otrzymujemy, po kolei,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}; \qquad \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = m\ddot{z}.$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = -mg$$

i po podstawieniu ich do (E-L) mamy

$$m\ddot{z} = -mg \quad .$$

Równanie odcałkowujemy dwukrotnie, otrzymując ostatecznie

$$\dot{z} = \dot{z}(0) - gt = -gt\,; \qquad z = h - \frac{1}{2}gt^2 .$$

Obecnie dokonamy alternatywnego rozwiązania naszego przykładu za pomocą kanonicznych równań Hamiltona. Dokonamy obliczeń po kolei, zakładając, że nie mamy a priori pojęcia o tym, że Hamiltonian wyraża energię całkowitą naszego ciała, a także nie domyślamy się, jaki związek mógłby łączyć pęd p_z i prędkość $\dot{z}$.

W naszym jednowymiarowym przypadku zmiennej naturalnej *z*, Hamiltonian (generalnie funkcja niezależnych zmiennych położenia uogólnionego, pędu uogólnionego i czasu, $H = H(q, p, t)$) definiowany jest jako

$$H := p_z \dot{z} - L = p_z \dot{z} - \frac{m\dot{z}^2}{2} + mgz \quad .$$

Również z definicji, $p_z := \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \equiv \frac{\partial}{\partial \dot{z}} \frac{m\dot{z}^2}{2} = m\dot{z}$, a więc $\dot{z} = \frac{p_z}{m}$. Aby wyrazić Hamiltonian we właściwych dla niego zmiennych (z, p_z) , wstawiamy to do wyrażenia na *H* i otrzymujemy

$$H = \frac{p_z^2}{m} - \frac{m\left(\frac{p_z}{m}\right)^2}{2} + mgz = \frac{p_z^2}{m} - \frac{p_z^2}{2m} + mgz = \frac{p_z^2}{2m} + mgz \quad .$$

Przywołajmy teraz postać równań kanonicznych dla naszego przypadku ruchu tylko po osi *z*:

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial}{\partial z} H\,, \quad \dot{z} = \frac{\partial}{\partial p_z} H \qquad \text{(KI, KII)}$$

i obliczmy je dla znalezionej przed chwilą postaci Hamiltonianu:

$$\dot{p}_z = -mg\,, \quad m\dot{z} = p_z \quad .$$

Z (KI) mamy, całkując je obustronnie,

$$p_z = p_z(0) - mgt = -mgt \quad .$$

Podstawiając to do równania (KII), przyjmuje ono postać

$$\dot{z} = -g t \quad ,$$

skąd, po odcałkowaniu, otrzymujemy ostatecznie

$$z = h - \frac{1}{2} g t^2 \quad .$$

Polecana lektura: Stefan Banach, Mechanika (wyd. II – 1947), tom II, ss. 493-494, 504-505.